11. Funktionen

Lineare Funktionen

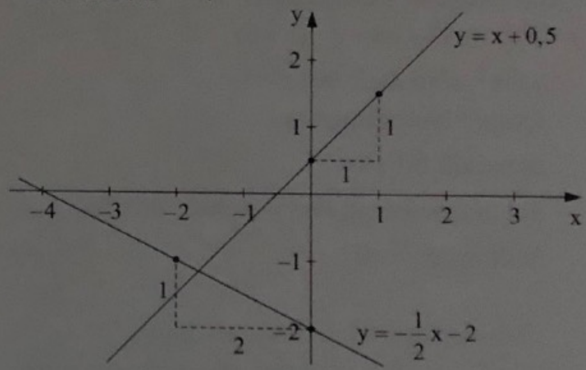
Funktionsgleichung $f(x) = y = mx + b$

- $\mathbf{y = mx + b}$ mit $m \neq 0$, $b \neq 0$
  Graph: Gerade
  m: Steigung der Geraden
  $m > 0$: Gerade steigend
  $m < 0$: Gerade fallend
  b: Achsenabschnitt auf der y-Achse
  Schnittpunkt mit der y-Achse:
  $(0|b)$
  Schnittpunkt mit der x-Achse:
  $\left(-\frac{b}{m}\middle|0\right)$
  Nullstelle: $-\frac{b}{m}$

Beispiel:

$\mathbf{y = x + 0{,}5}$
$m = 1 \Rightarrow$ Gerade steigend
Schnittpunkt mit der y-Achse:
$b = 0{,}5 \Rightarrow S(0|0{,}5)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(-0{,}5|0)$
Nullstelle: $x = -0{,}5$

$\mathbf{y = -\frac{1}{2}x - 2}$
$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Gerade fallend
Schnittpunkt mit der y-Achse:
$b = -2 \Rightarrow S(0|-2)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(-4|0)$
Nullstelle: $x = -4$

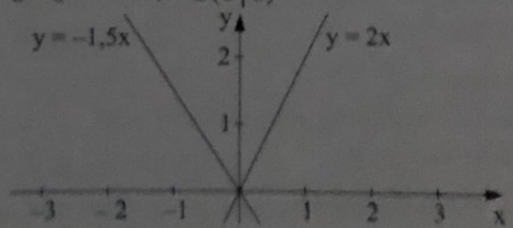


- $\mathbf{y = mx}$, also $m \neq 0$, $b = 0$
  Steigung:
  $m > 0$: Gerade steigend
  $m < 0$: Gerade fallend
  Graph: Gerade durch den Ursprung
  Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0|0)$
  Schnittpunkt mit der x-Achse: $S(0|0)$
  Nullstelle: $x = 0$

Beispiel:

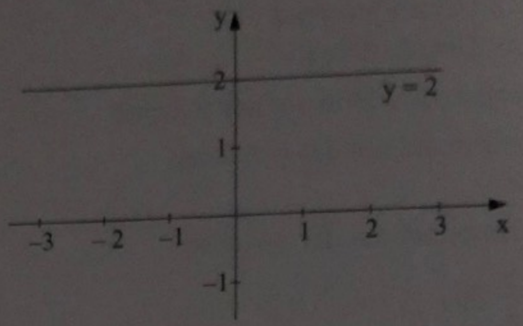
$\mathbf{y = 2x}$
$m = 2 \Rightarrow$ Gerade steigend
Schnittpunkt mit der y-Achse und gleichzeitig
Schnittpunkt mit der x-Achse:
$b = 0 \Rightarrow S(0|0)$

$\mathbf{y = -1{,}5x}$
$m = -1{,}5 \Rightarrow$ Gerade fallend
Schnittpunkt mit der y-Achse und gleichzeitig
Schnittpunkt mit der x-Achse:
$b = 0 \Rightarrow S(0|0)$



- **$y=b$**, also $m=0,\ b\neq 0$
  Graph: Parallele zur x-Achse im Abstand b
  Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0|b)$
  keine Nullstelle

Beispiel:
$y=2$
$m=0 \Rightarrow$ Gerade parallel zur x-Achse im Abstand 2
$b=2 \Rightarrow$ Schnittpunkt mit der y-Achse $S(0|2)$
keine Nullstelle



- **$y=0$**, also $m=b=0$

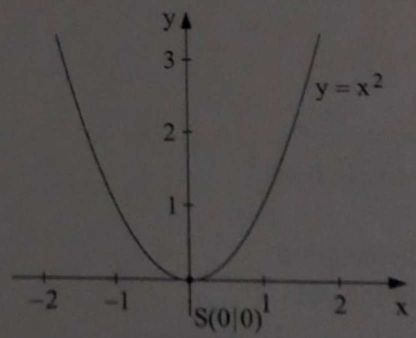
Graph: x-Achse

Quadratische Funktionen
$y=f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

- **$y=x^2$**, also $a=1,\ b=c=0$
  Graph: Normalparabel
  Scheitel: $S(0|0)$
  Schnittpunkt mit der x-Achse: $S(0|0)$
  Nullstelle: $x=0$

Beispiel:
$y=x^2$
Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4



- **$y=x^2+c$**, also $a=1,\ b=0$
  Graph: Die Normalparabel wird um c Einheiten in Richtung der y-Achse verschoben.
  Scheitel: $S(0|c)$
  Schnittpunkte mit der x-Achse:
  $c<0$: $N_1(-\sqrt{-c}|0)$; $N_2(+\sqrt{-c}|0)$
  $c=0$: $N(0|0)$
  Nullstellen:
  $c<0$: 2 Nullstellen, $-\sqrt{-c}$ und $+\sqrt{-c}$
  $c=0$: 1 Nullstelle
  $c>0$: keine Nullstelle

Beispiel:
$y=x^2+1$, also $a=1,\ b=0,\ c=1$
Der Graph ist eine um 1 Einheit längs der y-Achse nach oben verschobene Normalparabel. Daher gibt es keine Schnittpunkte mit der x-Achse (und keine Nullstellen).
Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	5	3,25	2	1,25	1	1,25	2	3,25	5

Scheitel: $S(0|1)$

$y=x^2-2$, also $a=1$, $b=0$, $c=-2$

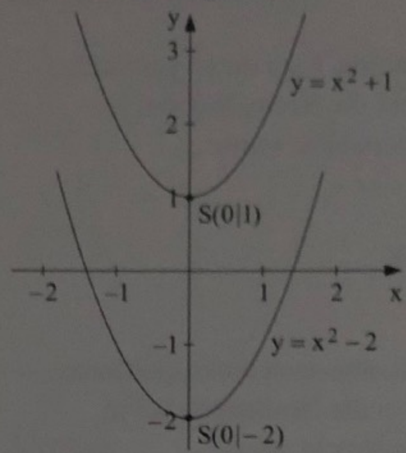
Der Graph ist eine um 2 Einheiten längs der y-Achse nach unten verschobene Normalparabel.

Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	2	0,25	−1	−1,75	−2	−1,75	−1	0,25	2

Scheitel: $S(0|-2)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(-\sqrt{2}|0)$; $N_2(\sqrt{2}|0)$



– **$y=ax^2$**, also $a\neq 0$, $b=c=0$

$a>1$:
Der Graph ist eine Parabel, wobei die Normalparabel in y-Richtung um den Faktor a gestreckt wurde.

Beispiel:

$y=2x^2$

$a=2$:

Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Strecken um den Faktor 2 in y-Richtung hervorgeht.

Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Scheitel: $S(0|0)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S(0|0)$

$0<a<1$:
Der Graph ist eine Parabel, wobei die Normalparabel in y-Richtung um den Faktor a gestaucht wurde.

$y=0{,}4x^2$

$a=0{,}4$:

Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Stauchen in y-Richtung um den Faktor 0,4 hervorgeht.

Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	1,6	0,9	0,4	0,1	0	0,1	0,4	0,9	1,6

Scheitel: $S(0|0)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S(0|0)$

$y = x^2 - 2$, also $a=1$, $b=0$, $c=-2$

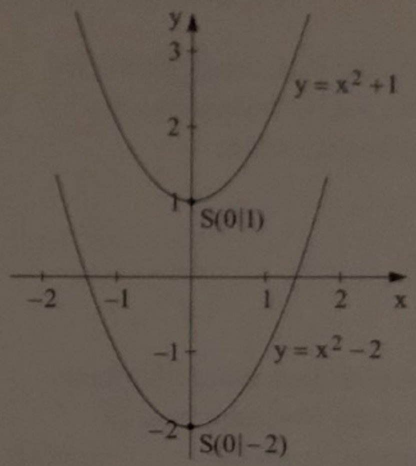
Der Graph ist eine um 2 Einheiten längs der y-Achse nach unten verschobene Normalparabel.

Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	2	0,25	−1	−1,75	−2	−1,75	−1	0,25	2

Scheitel: S(0|−2)

Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(-\sqrt{2}|0)$; $N_2(\sqrt{2}|0)$



– **$y = ax^2$**, also $a \neq 0$, $b=c=0$

$a > 1$:
Der Graph ist eine Parabel, wobei die Normalparabel in y-Richtung um den Faktor a gestreckt wurde.

Beispiel:

$y = 2x^2$

$a=2$:

Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Strecken um den Faktor 2 in y-Richtung hervorgeht.

Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

Scheitel: S(0|0)

Schnittpunkt mit der x-Achse: S(0|0)

$0 < a < 1$:
Der Graph ist eine Parabel, wobei die Normalparabel in y-Richtung um den Faktor a gestaucht wurde.

$y = 0{,}4x^2$

$a=0{,}4$:

Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Stauchen in y-Richtung um den Faktor 0,4 hervorgeht.

Wertetabelle:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	1,6	0,9	0,4	0,1	0	0,1	0,4	0,9	1,6

Scheitel: S(0|0)

Schnittpunkt mit der x-Achse: S(0|0)

$a=-1$:
Der Graph ist eine an der x-Achse gespiegelte Normalparabel.

$y=-x^2$
$a=-1$:
Graph: An der x-Achse gespiegelte Normalparabel.

Wertetabelle:

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y	-4	$-2{,}25$	-1	$-0{,}25$	0	$-0{,}25$	-1	$-2{,}25$	-4

Scheitel: $S(0|0)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:
$S(0|0)$

$-1<a<0$:
Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, wobei die Normalparabel in y-Richtung gestaucht wurde.

$y=-0{,}4x^2$
$a=-0{,}4$:
Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Stauchen in y-Richtung um den Faktor 0,4 und Spiegeln an der x-Achse hervorgeht.

Scheitel: $S(0|0)$

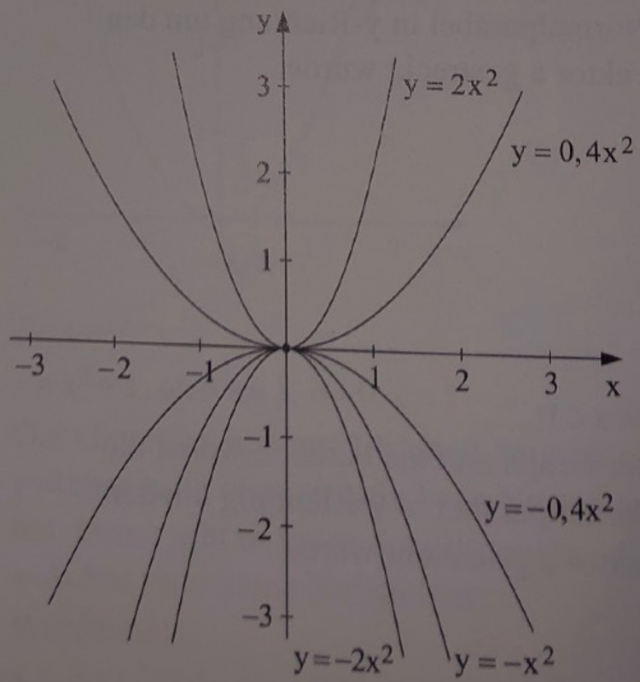
Schnittpunkt mit der x-Achse: $S(0|0)$

$a<-1$:
Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, wobei die Normalparabel in y-Richtung gestreckt wurde.

$y=-2x^2$
$a=-2$:
Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Strecken in y-Richtung um den Faktor 2 und Spiegeln an der x-Achse hervorgeht.

Scheitel: $S(0|0)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S(0|0)$

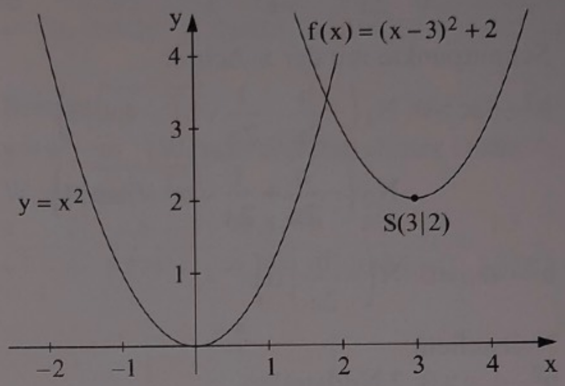


- **$y=(x-d)^2+e$** Scheitelpunktform
  Graph: In x-Richtung um d Einheiten und in y-Richtung um e Einheiten verschobene Normalparabel.
  Scheitel: $S(d|e)$
  Schnittpunkte mit der x-Achse:
  $e<0$: $N_1(d-\sqrt{-e}|0)$; $N_2(d+\sqrt{-e}|0)$
  $e=0$: $N(d|0)$
  Nullstellen:
  $e<0$: 2 Nullstellen ($d-\sqrt{-e}$ und $d+\sqrt{-e}$)
  $e=0$: 1 Nullstelle ($x=d$)
  $e>0$: keine Nullstelle

Beispiel:
$y=(x-3)^2+2$
Graph: Normalparabel, die um 2 Einheiten nach oben ($d=2$) und 3 Einheiten nach rechts ($e=3$) verschoben wurde.
Wertetabelle:

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6

Scheitel: $S(3|2)$
keine Nullstelle und damit keine Schnittpunkte mit der x-Achse ($e>0$)

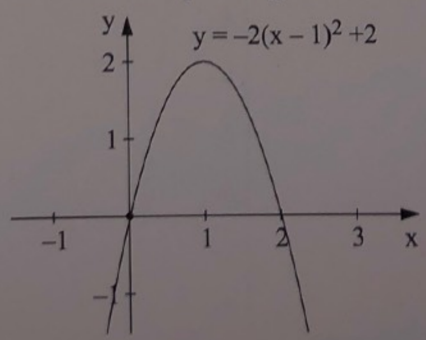


- **$y=a(x-d)^2+e$** Scheitelpunktform
  Graph: In x-Richtung um d Einheiten und in y-Richtung um e Einheiten verschobene Parabel, die aus der Normalparabel durch Strecken ($|a|>1$) oder Stauchen ($|a|<1$) und durch Spiegeln ($a<0$) hervorgegangen ist.
  Scheitel: $S(d|e)$
  Schnittpunkte mit der x-Achse:
  $-\frac{e}{a}>0$: $N_1\left(d-\sqrt{-\frac{e}{a}}\,\middle|\,0\right)$; $N_2\left(d+\sqrt{-\frac{e}{a}}\,\middle|\,0\right)$
  $e=0$: $N(d|0)$
  Nullstellen:
  $-\frac{e}{a}>0$: 2 Nullstellen ($d-\sqrt{-\frac{e}{a}}$; $d+\sqrt{-\frac{e}{a}}$)
  $e=0$: 1 Nullstelle ($x=d$)
  $-\frac{e}{a}<0$: keine Nullstelle

Beispiel:
$y=-2(x-1)^2+2$
Graph: Parabel, wobei der Graph der Normalparabel um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt ($|a|>1$), an der y-Achse gespiegelt ($a<0$) und um 1 Einheit nach rechts sowie um 2 Einheiten nach oben verschoben wurde.
Wertetabelle:

x	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	−6	−2,5	0	1,5	2	1,5	0	−2,5	−6

Scheitel: $S(1|2)$
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(0|0)$; $N_2(2|0)$
Nullstellen: $x_1=0$; $x_2=2$



– $y = ax^2 + bx + c$
Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Stauchen ($|a| < 1$) oder Strecken ($|a| > 1$) und (für $a < 0$) Spiegeln an der x-Achse sowie Verschieben um $-\frac{b}{2a}$ Einheiten längs der x-Achse und um $\frac{4ac - b^2}{4a}$ Einheiten längs der y-Achse hervorgegangen ist.

Scheitel: $\left(-\frac{b}{2a} \middle| \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$b^2 - 4ac > 0$: $N_1\left(-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \,|\, 0\right)$

$N_2\left(-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \,|\, 0\right)$

$b^2 - 4ac = 0$: $N\left(-\frac{b}{2a} \middle| 0\right)$

Nullstellen:

$b^2 - 4ac > 0$: 2 Nullstellen

$-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

und

$-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

$b^2 - 4ac = 0$: 1 Nullstelle ($x = -\frac{b}{2a}$)

$b^2 - 4ac < 0$: keine Nullstelle

Beispiel:

$y = x^2 + 6x + 11$

$a = 1$, $b = 6$, $c = 11$

Scheitelpunktform:

Normalform

$$y = \underbrace{x^2 + 6x}_{} + 11$$

$$y = \underbrace{x^2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{6}{2}}_{} \cdot x + \left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\substack{a^2 + 2 \cdot b \cdot a + b^2 \\ \text{Binom}}} \underbrace{- \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 11}_{\text{Zahl}}$$

quadratische Ergänzung

$$y = \underbrace{(x+3)^2}_{(a+b)^2} \quad \underbrace{-9 + 11}_{}$$

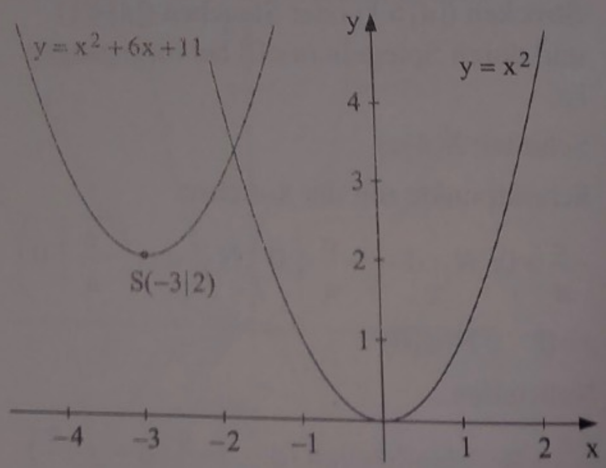
$$\underline{\underline{y = (x+3)^2 + 2}}$$

Scheitelpunktform

Scheitel: $\underline{\underline{S(-3|2)}}$

Graph: Der Graph ist eine um –3 Einheiten längs der x-Achse und um 2 Einheiten längs der y-Achse verschobene, nach oben offene Normalparabel.

Wegen $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = -8 < 0$ gibt es keine Nullstellen und damit auch keine Schnittpunkte mit der x-Achse.



– $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Stauchen ($|a| < 1$) oder Strecken ($|a| > 1$) und (für $a < 0$) Spiegeln an der x-Achse sowie Verschieben um $-\frac{b}{2a}$ Einheiten längs der x-Achse und um $\frac{4ac - b^2}{4a}$ Einheiten längs der y-Achse hervorgegangen ist.

Scheitel: $\left(-\frac{b}{2a} \middle| \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$b^2 - 4ac > 0$: $N_1\left(-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \middle| 0\right)$

$N_2\left(-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \middle| 0\right)$

$b^2 - 4ac = 0$: $N\left(-\frac{b}{2a} \middle| 0\right)$

Nullstellen:

$b^2 - 4ac > 0$: 2 Nullstellen

$-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$

und

$-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$

$b^2 - 4ac = 0$: 1 Nullstelle $(x = -\frac{b}{2a})$

$b^2 - 4ac < 0$: keine Nullstelle

Beispiel:

$\mathbf{y = x^2 + 6x + 11}$

$a = 1,\ b = 6,\ c = 11$

Scheitelpunktform:

Normalform

$$y = \underbrace{x^2 + 6x}_{} + 11$$

$$y = \underbrace{x^2 + 2 \cdot \underbrace{\frac{6}{2}}_{} \cdot x + \left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\substack{a^2 + 2 \cdot b \cdot a + b^2 \\ \text{Binom}}} \underbrace{- \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 11}_{\text{Zahl}}$$

quadratische Ergänzung

$$y = \underbrace{(x + 3)^2}_{(a + b)^2} \quad \underbrace{-9 + 11}_{}$$

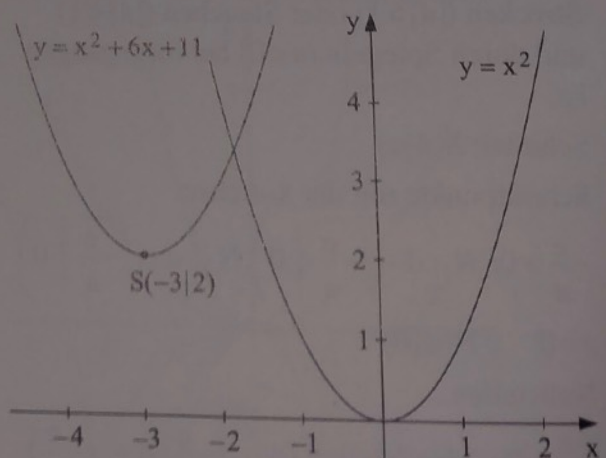
$$\underline{\underline{y = (x + 3)^2 + 2}}$$

Scheitelpunktform

Scheitel: $\underline{\underline{S(-3|2)}}$

Graph: Der Graph ist eine um –3 Einheiten längs der x-Achse und um 2 Einheiten längs der y-Achse verschobene, nach oben offene Normalparabel.

Wegen $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = -8 < 0$ gibt es keine Nullstellen und damit auch keine Schnittpunkte mit der x-Achse.



– $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Stauchen ($|a| < 1$) oder Strecken ($|a| > 1$) und (für $a < 0$) Spiegeln an der x-Achse sowie Verschieben um $-\frac{b}{2a}$ Einheiten längs der x-Achse und um $\frac{4ac - b^2}{4a}$ Einheiten längs der y-Achse hervorgegangen ist.

Scheitel: $\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$b^2 - 4ac > 0$: $N_1\left(-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \,\middle|\, 0\right)$

$N_2\left(-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} \,\middle|\, 0\right)$

$b^2 - 4ac = 0$: $N\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, 0\right)$

Nullstellen:

$b^2 - 4ac > 0$: 2 Nullstellen

$-\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

und

$-\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

$b^2 - 4ac = 0$: 1 Nullstelle $\left(x = -\frac{b}{2a}\right)$

$b^2 - 4ac < 0$: keine Nullstelle

Beispiel:

$\mathbf{y = x^2 + 6x + 11}$

$a = 1$, $b = 6$, $c = 11$

Scheitelpunktform:

Normalform

$$y = \underbrace{x^2 + 6x} + 11$$

$$y = x^2 + 2\cdot\underbrace{\frac{6}{2}}\cdot x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 11$$

quadratische Ergänzung

$$\underbrace{a^2 + 2\cdot b\cdot a + b^2}_{\text{Binom}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Zahl}}$$

$$y = \underbrace{(x+3)^2}_{(a+b)^2} \qquad \underbrace{-9+11}$$

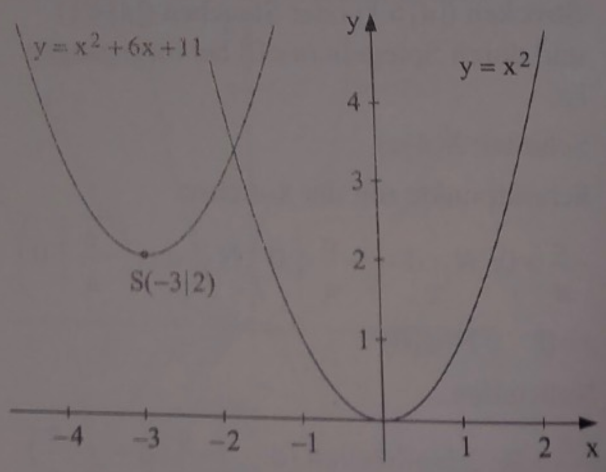
$$y = (x+3)^2 \quad + \; 2$$

Scheitelpunktform

Scheitel: $S(-3|2)$

Graph: Der Graph ist eine um –3 Einheiten längs der x-Achse und um 2 Einheiten längs der y-Achse verschobene, nach oben offene Normalparabel.

Wegen $b^2 - 4ac = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 11 = -8 < 0$ gibt es keine Nullstellen und damit auch keine Schnittpunkte mit der x-Achse.



– $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$

Graph: Parabel, die aus der Normalparabel durch Stauchen ($|a|<1$) oder Strecken ($|a|>1$) und (für $a<0$) Spiegeln an der x-Achse sowie Verschieben um $-\frac{b}{2a}$ Einheiten längs der x-Achse und um $\frac{4ac-b^2}{4a}$ Einheiten längs der y-Achse hervorgegangen ist.

Scheitel: $\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\,\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$b^2-4ac>0$: $N_1\left(-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\,\middle|\,0\right)$

$N_2\left(-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\,\middle|\,0\right)$

$b^2-4ac=0$: $N\left(-\frac{b}{2a}\,\middle|\,0\right)$

Nullstellen:

$b^2-4ac>0$: 2 Nullstellen

$-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

und

$-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

$b^2-4ac=0$: 1 Nullstelle $\left(x=-\frac{b}{2a}\right)$

$b^2-4ac<0$: keine Nullstelle

Beispiel:

$\mathbf{y=x^2+6x+11}$

$a=1,\ b=6,\ c=11$

Scheitelpunktform:

Normalform

$$y=\underbrace{x^2+6x}+11$$

$$y=\underbrace{x^2+2\cdot\underbrace{\frac{6}{2}}\cdot x+\left(\frac{6}{2}\right)^2}_{\substack{a^2+2\cdot b\cdot a+b^2\\ \text{Binom}}}\underbrace{-\left(\frac{6}{2}\right)^2+11}_{\text{Zahl}}$$

quadratische Ergänzung

$$y=\underbrace{(x+3)^2}_{(a+b)^2}\quad\underbrace{-9+11}$$

$$y=(x+3)^2+2$$

Scheitelpunktform

Scheitel: $\underline{S(-3|2)}$

Graph: Der Graph ist eine um –3 Einheiten längs der x-Achse und um 2 Einheiten längs der y-Achse verschobene, nach oben offene Normalparabel.

Wegen $b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot11=-8<0$ gibt es keine Nullstellen und damit auch keine Schnittpunkte mit der x-Achse.