Lösungen AB 2

Nr. 1

a) $S(3 \mid 18)$

b) $S(-2,5 \mid -7,5)$

c) $S(3 \mid 13,5)$

Nr. 2

a)
$$3x + 1 = 5x - 9 \quad | -1$$
$$3x = 5x - 10 \quad | -5x$$
$$-2x = -10 \quad | :(-2)$$
$$x = 5$$
$$f(5) = 3 \cdot 5 + 1 = 16$$
$S(5 \mid 16)$

b)
$$3x + 18 = 11x + 50 \quad | -18$$
$$3x = 11x + 32 \quad | -11x$$
$$-8x = 32 \quad | :(-8)$$
$$x = -4$$
$$f(-4) = 3 \cdot (-4) + 18 = 6$$
$S(-4 \mid 6)$

c)
$$0,5x + 10,5 = 0,75x + 9 \quad | -10,5$$
$$0,5x = 0,75x - 1,5 \quad | -0,75x$$
$$-0,25x = -1,5 \quad | :(-0,25)$$
$$x = 6$$
$$f(6) = 0,5 \cdot 6 + 10,5 = 13,5$$
$S(6 \mid 13,5)$

Nr. 3

a) A: $f(x) = 0,08x + 11,95$

B: $g(x) = 0,12x + 8,95$

b)
$$0,08x + 11,95 = 0,12x + 8,95 \quad | -11,95$$
$$0,08x = 0,12x - 3 \quad | -0,12x$$
$$-0,04x = -3 \quad | :(-0,04)$$
$$\underline{\underline{x = 75}} \text{ min}$$
$$f(75) = 0,08 \cdot 75 + 11,95 = 17,95 €$$
$$g(75) = 0,12 \cdot 75 + 8,95 = 17,95 €$$

c) Ab 76 Minuten ist Tarif A günstiger als Tarif B.

Lösungen Seiten 90, 91

Kurs Schnittpunkte bestimmen[E]

Einstiegsaufgabe

Die Kaufentscheidung sollte von der Anzahl der voraussichtlich zu erstellenden Ausdrucke abhängig gemacht werden. Die Differenz von 49,00 € beim Kaufpreis wird beim Kauf von 12,25 Druckerpatronen ausgeglichen, also bei ca. 12 250 Ausdrucken. Bis zu dieser Anzahl an Ausdrucken ist der Drucker Sam günstiger.

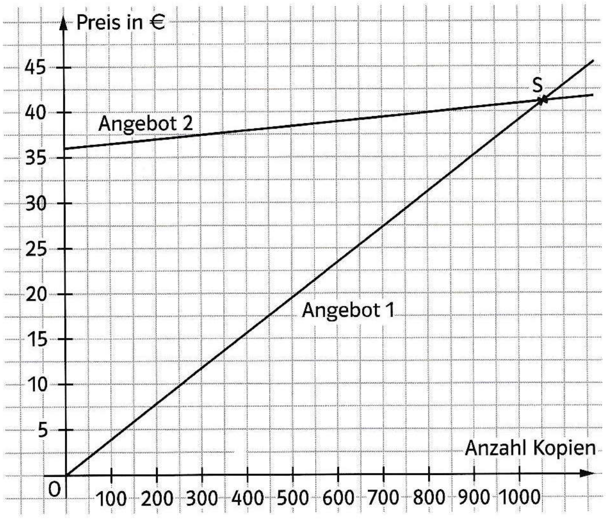
Seite 91

1 a)

Anzahl Kopien	0	200	400	600	800
Kosten Angebot 1 in €	0	7,8	15,6	23,4	31,2
Kosten Angebot 2 in €	36	36,98	37,96	38,94	39,92

Anzahl Kopien	1000	1200	1100	1050
Kosten Angebot 1 in €	39	46,8	42,9	40,95
Kosten Angebot 2 in €	40,9	41,88	41,39	41,145

Aus der Wertetabelle ergibt sich, dass bei einer Anzahl zwischen 1050 und 1100 Kopien im Monat Angebot 2 günstiger als Angebot 1 wird, unter 1050 Kopien ist Angebot 1 günstiger.
Lösung mit Graphen:



Der Schnittpunkt kann etwa bei (1050 | 41) abgelesen werden.
Lösung mit Funktionsgleichungen
Angebot 1: $f(x) = 0{,}039 \cdot x$
Angebot 2: $g(x) = 0{,}0049 \cdot x + 36$

Beim Schnittpunkt S sind Anzahl der Kopien und Preis bei beiden Angeboten gleich, also gilt:
$0{,}039 \cdot x_S = 0{,}0049 \cdot x_S + 36$
Durch Lösen dieser Gleichung erhält man
$x_S \approx 1056$; $f(1056) = 41{,}184$ €.
Ab 1056 Kopien im Monat ist Angebot 2 günstiger als Angebot 1. Bei weniger als 1056 Kopien ist Angebot 1 günstiger.
b) und c) individuelle Lösungen
Die Einzelwerte in Tabellen können leicht berechnet werden, erfordern aber zur Lösung unter Umständen sehr viel Rechenaufwand. Graphen bieten einen guten Überblick und der Schnittpunkt kann durch Ablesen gefunden werden. Das Ablesen der Lösung ist aber oft ungenau. Für die Lösung mit Funktionsgleichungen müssen die Gleichungen zunächst gefunden werden und die Werte für den Schnittpunkt durch Lösen einer Gleichung berechnet werden, dafür ist die Lösung aber genau.

2 a) Die Fußgänger treffen sich nach ca. 3,25 min in einer Entfernung von ca. 375 m von der Ampel.
b) $f(x) = 230 + 45x$; $g(x) = 550 - 5x$; x in min und f(x) bzw. g(x) in m

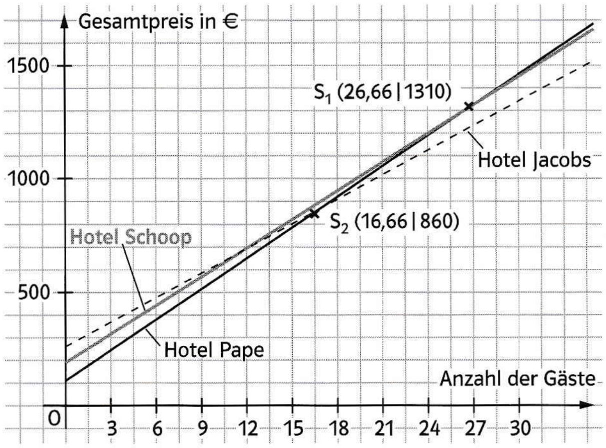
$$\begin{aligned} 230 + 45x &= 550 - 55x && \mid +55x \\ 230 + 100x &= 550 && \mid -230 \\ 100x &= 320 && \mid :100 \\ x &= 3{,}2 \end{aligned}$$

x in f(x): $230 + 45 \cdot 3{,}2 = 374$
Nach 3,2 min sind die Fußgänger genau 374 m von der Ampel entfernt.

3 a) Es werden die Transportkosten von Lkw, Zug und Schiff in Abhängigkeit von der Entfernung verglichen.
Transportkosten Lkw: Ausgehend von Fixkosten von ca. 150 € wachsen die Kosten um ca. 250 € pro 100 km bzw. um ca. 2,50 € pro km.
Zug: Fixkosten von ca. 250 €, die Kosten wachsen um ca. 100 € pro 100 km bzw. um ca. 1 € pro km.
Schiff: Fixkosten von ca. 400 €, die Kosten wachsen um ca. 50 € pro 100 km bzw. um ca. 0,50 € pro km.
Tipp: Um die Kosten pro km zu ermitteln, verwende ein Steigungsdreieck.
b) Beim Kriterium möglichst wenig Transportkosten sollte folgendermaßen entschieden werden:
Bis ca. 70 km Transport per Lkw;
von ca. 70 km bis ca. 300 km Transport per Zug;
über 300 km: Transport per Schiff.
Bei dem Schnittpunkt zweier Graphen sind die entsprechenden Transportwege gleich teuer. Bei dem Graphen, der anschließend „höher" liegt, sind die Transportkosten höher.

c) *Entfernung in km → Transportkosten pro Tonne in €:*
Lkw: $l(x) = 2{,}5x + 150$
Zug: $z(x) = x + 250$
Schiff: $s(x) = 0{,}5x + 400$
Transportkosten pro Tonne bei einer Entfernung von 1000 km:
$l(1000) = 2650$; $z(1000) = 1250$; $s(1000) = 900$
Bei 1000 km belaufen sich die Transportkosten für den Lkw auf 2650 €, für den Zug auf 1250 € und für das Schiff auf 900 €.

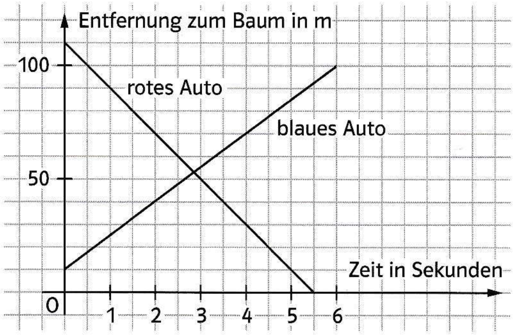
4 a)



Der Schnittpunkt zeigt, bei welcher Anzahl von Gästen welches Hotel günstiger ist.
Der Schnittpunkt liegt bei $S_1\left(26\tfrac{2}{3}\,\middle|\,1310\right)$, d.h. bei bis zu 26 Gästen ist das Hotel Pape der günstigere Ort zum Feiern, ab 27 Gästen ist das Hotel Schoop günstiger.
b) Der Schnittpunkt der Graphen „Hotel Jacobs" mit dem Graphen des Hotel Pape ist $S_2\left(16\tfrac{2}{3}\,\middle|\,860\right)$, d.h. bei einer Gästeanzahl über 16 (und unter 27) ist das Hotel Jacobs günstiger, ansonsten das Hotel Pape.

5 Individuelle Lösungen
Lösungsbeispiel: Als Erstes muss man die beiden Funktionsgleichungen gleichsetzen und die so entstandene Gleichung umformen, sodass man x_s bestimmen kann.
So erhält man die x-Koordinate des Schnittpunktes. Die y-Koordinate des Schnittpunktes y_s kann man bestimmen, indem man den Wert für x_s in eine der ursprünglichen Funktionsgleichungen einsetzt und nach y_s auflöst.

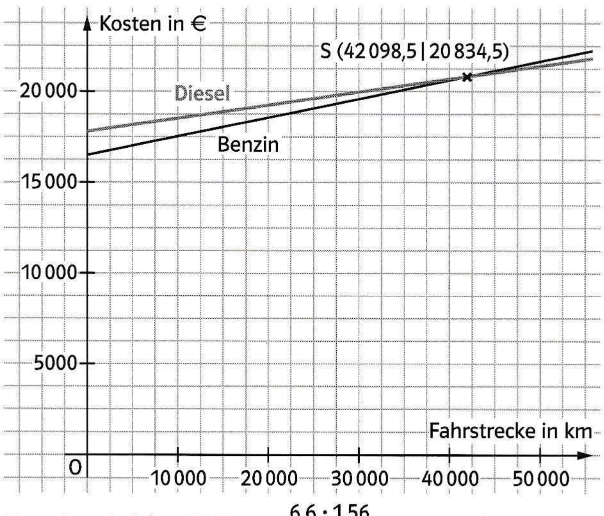
b)



Rechnerische Lösung:
$b(t) = 15t + 10$; $r(t) = -20t + 110$; t in Sekunden, $b(t)$ und $r(t)$ in m
$-20t_s + 110 = 15t_s + 10$
Durch Lösen dieser Gleichung erhält man
$t_s \approx 2{,}86$; $b(2{,}86) = 52{,}9$.
Nach ca. 2,9 Sekunden sind beide Autos etwa 53 m vom Baum entfernt.

7 a) Rechnerische Lösung:
$l(t) = 26{,}4t + 30$; $f(t) = 27{,}8t$; t in Sekunden, $l(t)$ und $f(t)$ in m
$26{,}4t_s + 30 = 27{,}8t_s$
Durch Lösen dieser Gleichung erhält man
$t_s \approx 21{,}4$.
Der hintere Lastwagen braucht etwa 21,4 Sekunden bis er mit dem vorderen gleichauf ist.
b) $f(21{,}4) \approx 595{,}7$
Der Überholvorgang dauert etwa 42,8 Sekunden und zieht sich über etwa 1,19 km hinweg.

8



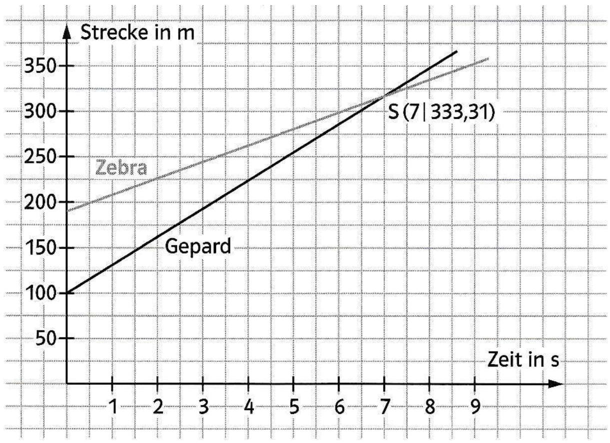
Benzin: $b(x) = 16\,500 + \frac{6{,}6 \cdot 1{,}56}{100} \cdot x$; x in km

Diesel: $d(x) = 17\,800 + \frac{5{,}3 \cdot 1{,}36}{100} \cdot x$; x in km

Gleichsetzen:
$16\,500 + 0{,}102\,96\,x_s = 17\,800 + 0{,}072\,08\,x_s$
Auflösen liefert: $x_s \approx 42\,098{,}5$
Der Schnittpunkt ist $S(42\,098{,}5 \mid 20\,834{,}5)$.
Nach knapp über 40 000 km Fahrt haben sich die Kosten der beiden Pkws angeglichen, beide Pkws haben dann Gesamtkosten von ca. 20 835 € verursacht. Ab einer Fahrstrecke von über 42 100 km ist der Diesel günstiger. Hier sind Steuern außer Acht gelassen worden.

9 a) Gekauftes Mineralwasser:
$12 \cdot 0{,}75 = 9$
In jeder Kiste sind 9 l Mineralwasser.
$4{,}90 : 9 \approx 0{,}544$ €/l
Ein Liter Mineralwasser kostet etwa 0,54 €.
Selbst hergestelltes Mineralwasser:
$1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1000\,l$
Wasserkosten $4 : 1000 = 0{,}004$
Kohlensäurepatrone $6 : 40 = 0{,}15$
Ein Liter Wasser kostet 0,004 € + 0,15 € = 0,154 €.
Tipp: Achte auf die Stellen nach dem Komma.
b) Funktionsgleichung gekauftes Mineralwasser:
$k(x) = 0{,}544x$; x in l, $k(x)$ in €
Funktionsgleichung für selbst hergestelltes Mineralwasser: $s(x) = 70 + 0{,}154x$; x in l, $s(x)$ in €.
Gleichsetzen der Funktionsterme und Auflösen der Gleichung liefert: $x_s = 179{,}49$
Ab ca. 180 l lohnt sich die Anschaffung eines Wasseraufbereitungsgerätes finanziell. Das entspricht 20 Kisten Mineralwasser.

10 Zuordnung:
Zeit in s → zurückgelegte Entfernung in m



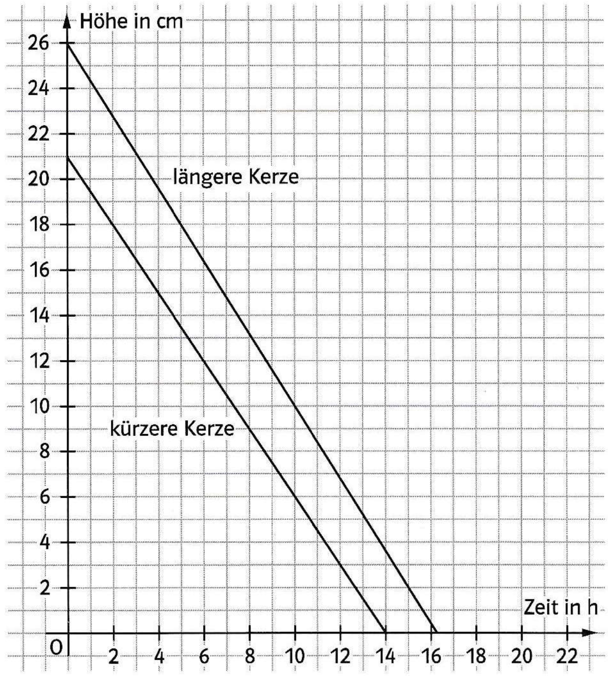
Der Startpunkt der Berechnung ist der Moment, wenn der Gepard mit gleichmäßiger Geschwindigkeit rennt. Zu diesem Zeitpunkt hat der Gepard schon 100 m zurückgelegt und das Zebra
$100\,m + 19{,}44 \cdot 5 = 197{,}2$
Zebra: $z(t) = 197{,}2 + 19{,}44t$
Gepard: $g(t) = 100 + 33{,}33t$
Gleichsetzen und Auflösen liefert: $t_s = 7$
Nach 7 Sekunden Höchstgeschwindigkeit hätte der Gepard das Zebra also erreicht. In 7 s wäre er $33{,}33\,\frac{m}{s} \cdot 7\,s = 233{,}31\,m$ gelaufen.

Der Gepard kann aber nur über 200 m seine Höchstgeschwindigkeit halten. Demnach entkommt das Zebra.

Seite 93

11 Rechnerische Lösung:
Casi: $c(x) = 26x + 110$
Sam: $s(x) = 29x + 100$
Die Variable x steht jeweils für die Anzahl der Druckerpatronen.
Gleichsetzen und Auflösen liefert: $x_s = 3\frac{1}{3}$
Nach $3\frac{1}{3}$ Druckerpatronen oder etwa 3300 Ausdrucken hat sich der höhere Anschaffungspreis des Casi-Druckers ausgeglichen.
Tipp: Eine grafische Lösung ist zu ungenau. Nutze die rechnerische Lösung.

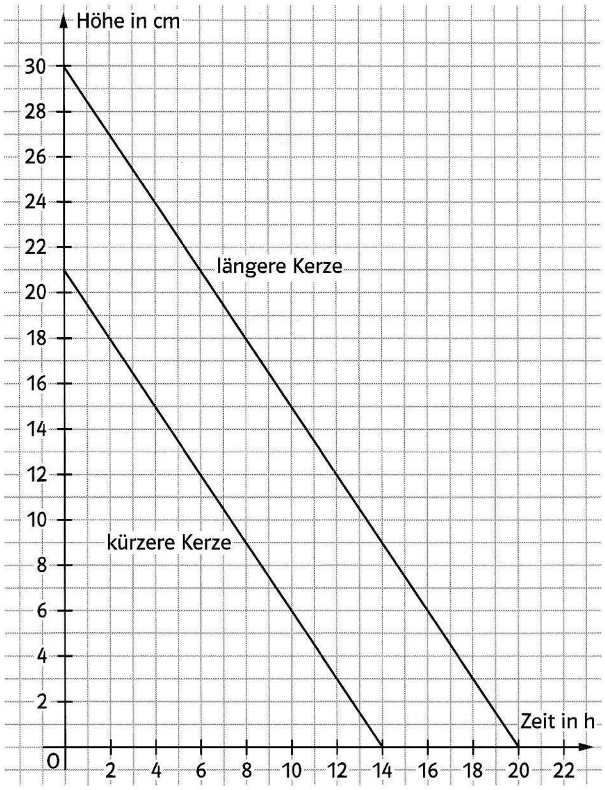
12 a) und b)



Zuordnung:
Zeit in Stunden → Höhe der Kerze in cm
Kerze 1: $l(x) = 26 - 1{,}6x$
Kerze 2: $k(x) = 21 - 1{,}5x$
Die Kerzen sind gleich lang, wenn sie beide abgebrannt sind.
Kerze 1 brennt $26 : 1{,}6 = 16{,}25$ Stunden, Kerze 2 nur 14 Stunden – also sind sie nach 16,25 Stunden gleich lang, nämlich 0 cm.
In der Grafik sieht man, dass die beiden Geraden keinen Schnittpunkt im positiven Bereich der y-Achse haben.

c) Gleichsetzen der Funktionsterme und Auflösen liefert: $x_s = 50$. So lang brennen aber die beiden Kerzen nicht. Der rechnerische Schnittpunkt liegt bei $S(50 \mid -54)$.

13 a) Die Kerzen sind erst gleich lang, wenn sie beide abgebrannt sind, nämlich 0 cm lang. Das ist nach 20 Stunden der Fall.



Die Grafik zeigt: Die Geraden sind parallel. Sie schneiden sich also nicht.
b) Zuordnung:
Zeit in Stunden → Höhe der Kerze in cm
Kerze 1: $l(x) = 30 - 1{,}5x$
Kerze 2: $k(x) = 21 - 1{,}5x$
Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$30 - 1{,}5x_s = 21 - 1{,}5x_s \quad | -1{,}5x_s$$
$$30 = 21 \quad \text{falsche Aussage!}$$

Das Gleichsetzen der Funktionsterme liefert nach Auflösen der Gleichung eine falsche Aussage. Das heißt, dass es keinen Wert für x gibt, der die Gleichung erfüllt. Somit gibt es keinen Schnittpunkt der beiden Geraden.